

5. En la figura 82, ABCD es un cuadrado.

E: punto medio de $\overline{AB}$

F: punto medio de $\overline{DC}$

G: punto medio de $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$

H: punto medio de $\overline{EC}$ y $\overline{FB}$

Prueba que:

a) $\triangle AGE = \triangle DGF = \triangle EHB = \triangle HCF$,

b) $\triangle AGD = \triangle BCH$,

c) todos los triángulos anteriores son isósceles.

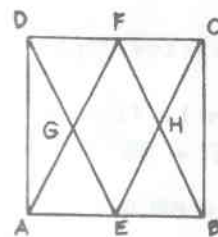


Fig. 82

6.

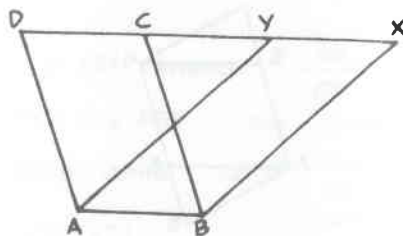


Fig. 83

En la figura 83, ABCD y ABXY son paralelogramos tales que los puntos D, C, Y, X están en una recta.

Prueba que:

$\triangle ADY = \triangle BCX$

7. Si ABCD es un trapecio isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ (fig. 84).

Prueba que:

a) $\triangle ABC = \triangle ABD$

b) $\triangle ADC = \triangle BDC$

c) $\triangle AOB$ y $\triangle DOC$ isósceles

d) $\triangle AOD = \triangle BOC$

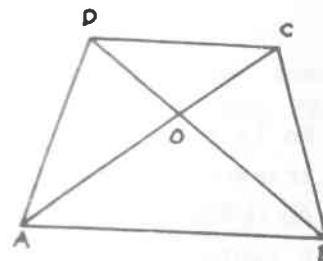


Fig. 84

8. En la figura 85, ABCD y AEFG son cuadrados. Prueba que: $\triangle ABE = \triangle ADG$

9. Si $\triangle AEB$, $\triangle ACD$ isósceles de bases $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ respectivamente (fig. 86) y $\alpha = \beta$. Prueba que: $\triangle ABC = \triangle AED$

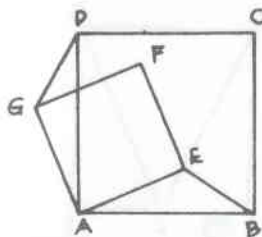


Fig. 85

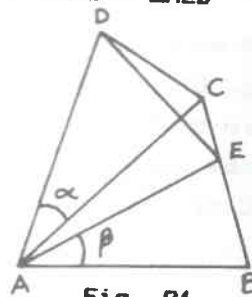


Fig. 86

10. En la figura 87, $\overline{AD}$ es un diámetro, $\overline{BH} = \overline{HC}$, $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ distancias de O a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Prueba que:
 $\overline{EN} = \overline{MF}$

11. Si $\overline{AB} = \overline{CD}$ (fig.88) $\overline{AD}$ y $\overline{EF}$ diámetros. Prueba que
 $\overline{ON} = \overline{OM}$.

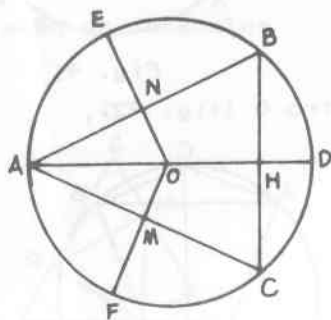


Fig.87

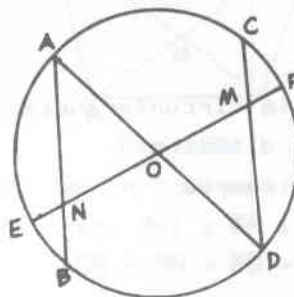


Fig.88

12. Si $\widehat{AB} = \widehat{CD} = 80^\circ$ (fig.89)

$\overline{ON}$: distancia de O a $\overline{AB}$

$\overline{OM}$: distancia de O a $\overline{CD}$

Prueba que:

a) $\triangle ANO = \triangle OMC$

b) Calcula el valor del
 $\angle MOC$

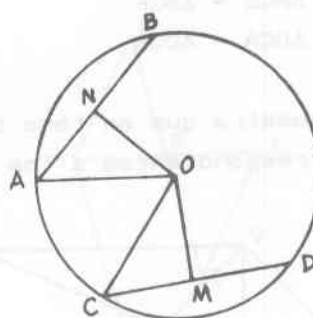


Fig. 89

13. Si $\overline{QE}$ pasa por O (fig. 90), $\overline{AD} \perp \overline{QE}$ y $\widehat{BM} = \widehat{MC}$. Prueba que: $\overline{AB} = \overline{DC}$, si A y D son puntos de la circunferencia

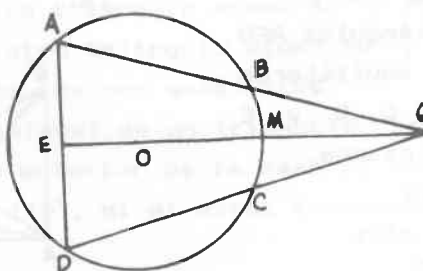


Fig. 90

14. A, B, C, y D son puntos de la circunferencia de centro O (fig. 91), $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ cuerdas que se cortan en E $\overline{DE} = \overline{AE}$.

Prueba que:

$$\triangle ABE = \triangle CDE$$

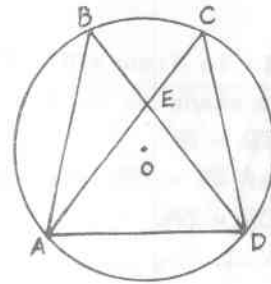


Fig. 91

15. En la circunferencia de centro O (fig. 92),

$\overline{CD}$: diámetro

$\overline{AB}$: cuerda

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\overline{AC} = \overline{CB}$

Prueba que:

a) $\triangle ADE = \triangle BDE$

b) $\triangle ACE = \triangle BCE$

c) $\triangle DCA = \triangle DCB$

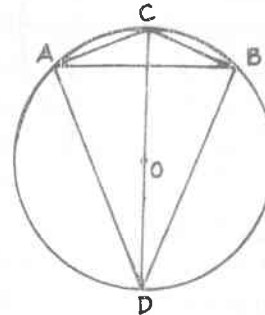


Fig. 92

16. Demuestra que en todo triángulo isósceles las alturas correspondientes a los lados iguales, son iguales.

17.

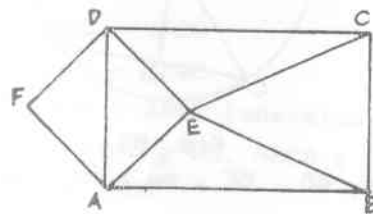


Fig. 93

En la figura 93, ABCD es un rectángulo y AEDF un cuadrado.

a) Prueba que: $\triangle AEB = \triangle DEC$

b) Si $\overline{CE} = 4,0$ cm, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{BE}$? Justifica tu respuesta.

18. Si los triángulos AED y BCD son equiláteros (fig. 94). C, D y E puntos alineados.

Prueba que:

a) $\triangle ADC = \triangle ABE$

b) $\overline{BE} = \overline{AC}$

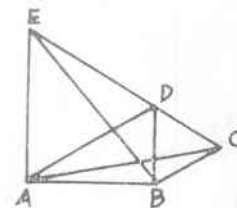


Fig. 94

19. ABCDE: pentágono regular

(fig. 95)

EMCD: rombo

$$\angle AEM = \angle MCB$$

Prueba que:

a) $\triangle AME = \triangle MBC$

b) $\triangle ABM$ es isósceles

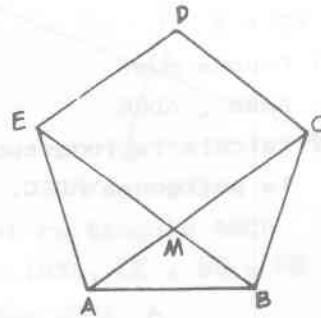


Fig. 95

20.

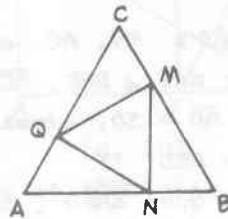


Fig. 96

Si ABC es un triángulo equilátero (fig. 96) y

$$\overline{CM} = \overline{BN} = \overline{AQ}$$

Prueba que:

$\triangle MNQ$ es equilátero.

21. En la figura 97,

E: punto medio de $\overline{FD}$ y $\overline{AC}$

D: punto medio de $\overline{BC}$

Prueba que:

a) $\triangle AEF = \triangle EDC$

b) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$

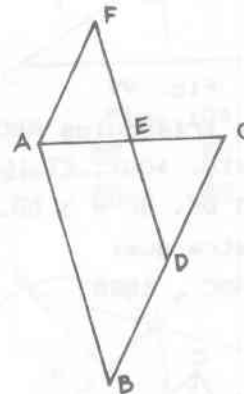


Fig. 97

22. Dos ángulos de un triángulo miden 43° y 77° . Si dos de los ángulos de otro triángulo miden 60° y 43° , prueba que estos triángulos son semejantes.
23. Si el ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 50° y un ángulo exterior de la base de otro triángulo isósceles mide 115° , di si estos triángulos son semejantes.

24. En el rectángulo ABCD (fig. 98), $\overline{CE} \perp \overline{BD}$, $\overline{AB} = 12$ y $\overline{AD} = 9$

a) Prueba que:
 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$

b) Calcula la longitud de la poligonal ADEC.

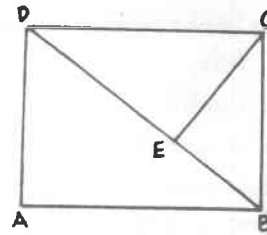


Fig. 98

25.

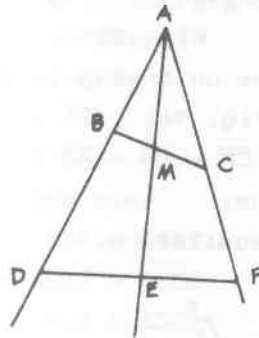


Fig. 99

26. En los triángulos ABC y DEB (fig. 100), $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AB} = 3 \overline{DE}$, $\overline{BC} = 3 \overline{BD}$.
 Demuestra que:
 $\triangle ABC \sim \triangle BED$

En la figura 99, AE es la bisectriz del $\angle BAC$, $\overline{AC} = 10$, $\overline{AM} = 9$ y $\overline{AD} = 30$, además, $\angle AMC = \angle AED$

- a) Prueba que: $\triangle AED \sim \triangle AMC$
 b) Calcula $\overline{ME}$

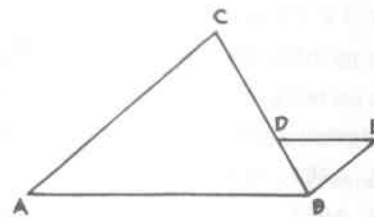


Fig. 100

27.

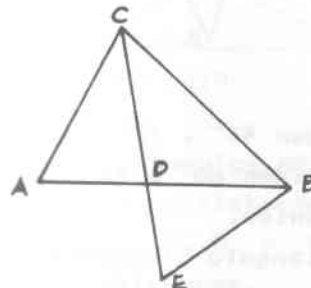


Fig. 101

En la figura 101

$$\angle CAB = \angle CEB$$

$\overline{CD}$: bisectriz del $\angle ACB$

Demuestra que:

- a) $\triangle ACD \sim \triangle DBE$
 b) $\triangle ADC \sim \triangle CBE$

28. Los lados de un triángulo miden 15, 30 y 18 cm respectivamente; si los lados de otro triángulo son de 20, 40 y 24 cm respectivamente, di si los mismos son seme-

jantes. Justifica tu respuesta.

29. En el paralelogramo ABCD (fig. 102)
E: punto medio de $\overline{BC}$
D, E y F puntos alineados. Prueba que:
 $\triangle DEC \sim \triangle BEF \sim \triangle AFD$

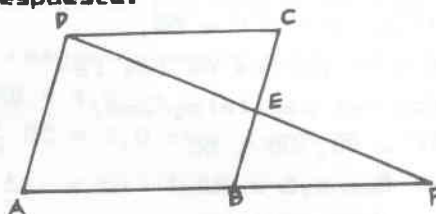


Fig. 102

En el rectángulo ABCD (fig. 103), $\overline{CE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{FG} \perp \overline{DC}$
Prueba que:
 $\triangle CED \sim \triangle CEB \sim \triangle BCD \sim \triangle BCF$ y establece la proporcionalidad entre sus lados.

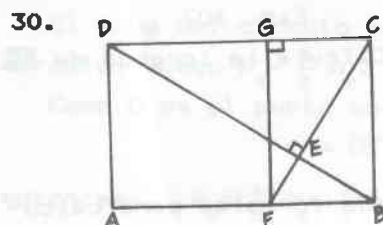


Fig. 103

31. En el $\triangle ABC$ (fig. 104)
 $\angle A = \angle D = 90^\circ$
Prueba que:
 $\triangle ABC \sim \triangle DEB$ y establece la proporcionalidad entre sus lados.

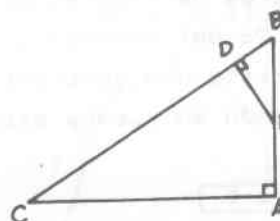


Fig. 104

32. En la figura 105 para probar que: $\frac{QA}{QB} = \frac{QC}{QB}$

- ¿Qué triángulos habrá que seleccionar para demostrar que son semejantes?
- Demuestra la semejanza de los mismos.
- ¿Cuáles son los lados homólogos?

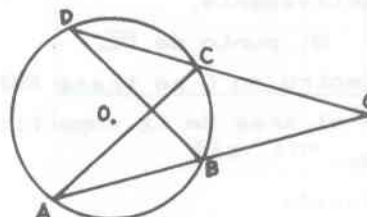


Fig. 105

- Prueba que: $QA \cdot QB = QC \cdot QB$

33.

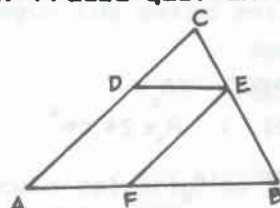


Fig. 106

Si en el $\triangle ABC$ (fig. 106),

$$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$$

$$\text{y } \overline{EF} \parallel \overline{AC}$$

Prueba que:

$$\overline{CD} \cdot \overline{FB} = \overline{EF} \cdot \overline{DE}$$

34. En el paralelogramo ABCD
(fig. 107), $F \in \overline{DB}$,

E y G: puntos de los lados del paralelogramo,

$\overline{EF} \perp \overline{BD}$, $\overline{BG} \perp \overline{DC}$

a) Demuestra que:

$$\triangle EFB \sim \triangle BDG$$

b) Si $\overline{EB} = 8,0$ cm ;

$\overline{BD} = 10$ cm ; $\overline{EF} = 6,0$ cm . Calcula la longitud de $\overline{BG}$.

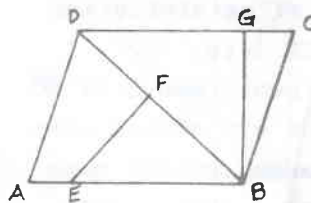


Fig. 107

9. Cálculo de áreas y volúmenes

En grados anteriores has estudiado fórmulas para calcular el área de figuras planas y el volumen de cuerpos (puntos 25 y 26 del Memento), además; aplicando el cálculo integral hiciste una generalización para el cálculo de áreas.

Teniendo en cuenta esto analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

En la figura 108, ABCD es un rectángulo, $\overline{AB} = 4,0$ cm ;

$\overline{BC} = 6,0$ cm ;

E y F puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente,

G: punto de $\overline{DC}$.

Con centro en O se traza EHF.

Halla el área de la superficie rayada.

Resolución

El área sombreada es la diferencia entre el área del rectángulo ABCD y de la figura GEHF compuesta por un triángulo y un semicírculo.

Cálculo del área del rectángulo ABCD (A_1)

$$A_1 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4 \cdot 6 = 24 ; A_1 = 24 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área del triángulo GEF (A_2)

En el $\triangle GEF$, $\overline{EF}$: base y $\overline{CG}$: altura.

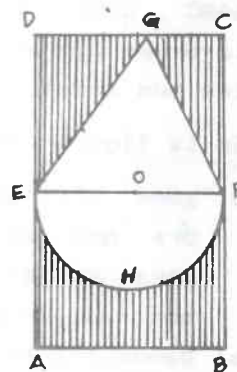


Fig. 108

Como los puntos E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AD} = \overline{BC}$ del rectángulo respectivamente entonces:

$$\overline{EF} = \overline{AB} = 4,0 \text{ cm}$$

$$\text{y } \overline{CF} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 3,0 \text{ cm} \quad \text{luego}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \overline{EF} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6,0 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área del semicírculo EHF (A_3)

El área del círculo es $A_c = \pi r^2$, pero EHF es un semicírculo, luego $A_3 = \frac{1}{2} A_c$.

Como O es el punto medio de $\overline{EF}$ tenemos que:

$$r = \overline{OE} = \frac{1}{2} \overline{EF} = 2,0 \text{ cm};$$

$$\text{entonces, } A_3 = \frac{1}{2} A_c = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 6,28 \text{ cm}^2$$

$$\text{por tanto } A_3 = A_1 - (A_2 + A_3) = 24 - (6 + 6,28) = 11,72$$

$$A_3 = 12 \text{ cm}^2 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2

La sección transversal de una pieza tiene la forma que se muestra en la figura 109 donde $\overline{AG} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AG} = \overline{BC} = 5,0 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$, $\overline{FD} = 6,0 \text{ cm}$, $\overline{FD} \parallel \overline{GC}$ y FED un semicírculo de centro en el punto medio de $\overline{FD}$.

Si la altura de la pieza es de 15 cm, calcula el área de esta sección.

Resolución

Para hallar el área de la sección transversal de la pieza podemos descomponerla en tres figuras planas conocidas, según los datos estas son:

ABCG: rectángulo

GCDF: trapecio

FED: semicírculo

Cálculo del área de ABCG (A_1)

$$A_1 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 5 \cdot 10 = 50 \quad ; \quad A_1 = 50 \text{ cm}^2$$

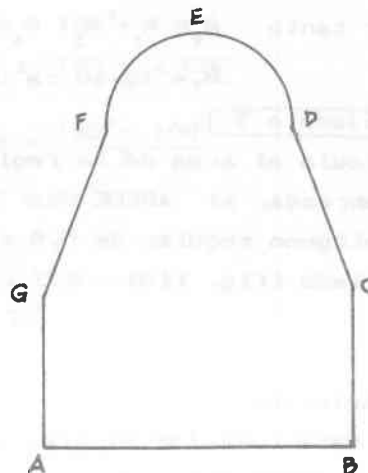


Fig. 109

Cálculo del área de FED (A_2)

Como tiene su centro en el punto medio de FD entonces

$$r = \frac{\overline{FD}}{2} = 3 \text{ cm} \quad \text{por tanto}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 9 = 14,1 ; \quad A_2 = 14,1 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área de GCDF (A_3)

Para calcular el área de este trapecio conocemos las longitudes de las bases y debemos calcular su altura (h).

Como la pieza tiene una altura total de 15 cm y conocemos que $\overline{BC} = 5,0$ cm y el radio del semicírculo es 3,0 cm entonces:

$$h = 15 - (5 + 3) = 15 - 8 = 7$$

$$\text{luego } A_3 = \frac{\overline{FD} + \overline{GC}}{2} \cdot h = \frac{6 + 10}{2} \cdot 7 ; \quad A_3 = 56 \text{ cm}^2$$

$$\text{por tanto } A_T = A_1 + A_2 + A_3 = 50 + 56 + 14,1 = 120,1$$

$$A_T = 120,10 \text{ cm}^2 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3

Calcula el área de la región sombreada, si ABCDE es un pentágono regular de 5,6 cm de lado (fig. 110)

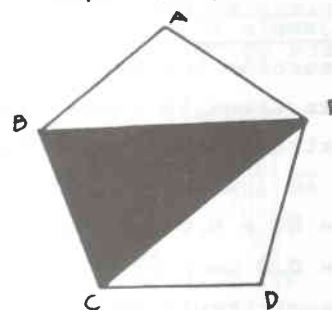


Fig. 110

Resolución

Para calcular el área sombreada ($\triangle BCE$) una vía posible es conocer dos lados y el ángulo comprendido entre estos lados; conocemos el lado $\overline{BC}$ (lado del pentágono), podemos buscar $\overline{CE}$ y $\angle BCE$.

Cálculo de $\overline{CE}$

En el $\triangle CDE$, aplicando la ley de los cosenos tenemos que

$$\overline{CE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 - 2 \overline{CD} \cdot \overline{DE} \cos \angle CDE \quad (1)$$

$$\overline{CD} = \overline{DE} = 5,6 \text{ cm} \quad \text{por ser lados del pentágono}$$

luego (1) se reduce a:

$$\overline{CE}^2 = 2\overline{CD}^2 (1 - \cos \angle CDE) \quad (2)$$

Como $\angle CDE$ es un ángulo interior del pentágono y la suma de los ángulos interiores de un polígono regular es

$180^\circ(n - 2)$ entonces:

$$\angle CDE = \frac{1}{5} [180^\circ(n - 2)] = \frac{1}{5} \cdot 180^\circ \cdot 3 = 36^\circ \cdot 3 = 108^\circ$$

luego sustituyendo en (2) tenemos:

$$\begin{aligned}\overline{CE}^2 &= 2 \cdot (5,6)^2 (1 - \cos 108^\circ) \\ &= 2(31,4) (1 + \cos 72^\circ) \\ &= 62,8(1 + 0,039) \\ &= 62,8 \cdot 1,309 \\ &= 82,2052 \\ &= 82,21 \\ \overline{CE} &= 9,07\end{aligned}$$

Cálculo del $\angle BCE$

Como el $\triangle CDE$ es isósceles de base $\overline{CE}$ entonces por suma de ángulos interiores tenemos:

$$\begin{aligned}2 \angle ECD + \angle CDE &= 180^\circ \\ \angle ECD &= \frac{180^\circ - \angle CDE}{2} \\ \angle ECD &= \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} \\ \angle ECD &= 36^\circ\end{aligned}$$

además, $\angle BCE + \angle ECD = 108^\circ$

$$\begin{aligned}\angle BCE &= 108^\circ - \angle ECD \\ \angle BCE &= 108^\circ - 36^\circ \\ \angle BCE &= 72^\circ\end{aligned}$$

Cálculo del área del $\triangle BCE$

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{CE} \sin \angle BCE \\ &= 0,5 \cdot 5,6 \cdot 9,07 \sin 72^\circ \\ &= 25,396 \cdot 0,951 \\ A &= 24 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Observa en el ejemplo anterior que otra vía posible para calcular dicha área es calcular el área del pentágono (semiperímetro por apotema) y restarle el área de los triángulos.

Ejemplo 4

Calcula el área sombreada de acuerdo con los datos de la figura 111.